

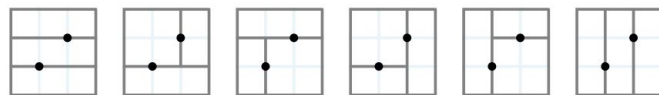
## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 01.12.2024

### ЮНИОРЫ, ВЫСШАЯ ЛИГА (бои за 1-4 места)

1. Окружность  $\omega$  касается окружности  $\omega_1$  в точке  $P$ . Прямая  $\ell$  отсекает на окружностях  $\omega$  и  $\omega_1$  равные хорды  $AB$  и  $A_1B_1$  (порядок точек  $A - B - B_1 - A_1$ ). Прямые  $PA_1$  и  $PB_1$  повторно пересекают окружность  $\omega$  в точках  $A'$  и  $B'$ . Лучи  $AA'$  и  $BB'$  пересекаются в точке  $Q$ . Докажите, что окружность  $(QA'B')$  пересекает окружность  $\omega_1$  в двух точках, причем их можно назвать  $X$  и  $Y$  так, чтобы  $\angle APB = \angle AXA_1 - \angle BYB_1$ .

2. Дима и Саша занимаются двумя на первый взгляд совершенно разными делами. У Димы есть фигура «хромой король» — она умеет ходить на 1 клетку вверх или вправо, а также на 1 клетку по диагонали вправо-вверх. Пусть  $A$  — количество путей хромого короля по доске  $n \times n$  из левого нижнего угла в правый верхний, которые никогда не поднимаются выше главной диагонали.

А у Саши есть бумажный квадрат  $n \times n$  и резак, которым он может проводить горизонтальные или вертикальные разрезы «от края до края». Саша отметил  $n - 1$  узлов клеток, лежащих внутри квадрата на его главной диагонали, и каждый очередной разрез делает по одному из отмеченных узлов, по которому еще разрез не проводился (разрез проводится от края до края того куска бумаги, на котором расположен выбранный на данном ходу узел). Пусть  $B$  — количество способов так разрезать квадрат (способы отличающиеся только порядком разрезов считаются одинаковыми). Докажите, что  $A = B$ . (На рисунках изображены примеры всевозможных способов при  $n = 3$ .)



3. Дано простое  $p > 5$ . Докажите, что для некоторого натурального  $k \leq \frac{p-5}{2}$  число  $kp + 1$  является суммой квадратов двух натуральных чисел.

4. Треугольник  $ABC$  описан около окружности с центром  $I$  и вписан в окружность  $\omega$  с центром  $O$ . Прямая  $OI$  пересекает прямые  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  в точках  $C'$ ,  $B'$  и  $A'$  соответственно. Точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  на окружности  $\omega$  выбраны так, что  $\angle AA_1I = \angle BB_1I = \angle CC_1I = 90^\circ$ . Докажите, что окружности  $(A_1B_1C')$ ,  $(A_1B'C_1)$  и  $(A'B_1C_1)$  имеют общую точку.

5. Можно ли все диагонали какого-нибудь выпуклого 100-угольника покрыть 94 треугольниками с вершинами в его вершинах?

6. Существуют ли натуральные числа  $n$  и  $k$  и простое число  $q$ , для которых

$$n^q + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = q^k?$$

7. Найдите наибольшее натуральное  $k$ , для которого можно выбрать несколько натуральных чисел от 1 до  $2^n$  и раскрасить их в  $k$  цветов так, чтобы сумма всех чисел каждого цвета равнялась степени двойки ( $1 = 2^0$  тоже считается степенью двойки).

8. Вася заказал в интернете  $n$  одинаковых колод по 50 различных карт в каждой. Ему пришли несколько коробок с картами, в каждой коробке не более 2024 карт. К сожалению, карты в коробках не разложены по колодам. Более того, не гарантируется, что каждая колода целиком находится в одной коробке. Докажите, что существует такое  $N$ , что при любом  $n > N$  Вася гарантированно может часть (хотя бы одну, но не все) коробок отдать Пете так, чтобы каждый из них использовав все свои карты мог сложить несколько полных колод.

9. Числа  $a, b, c, d \in (0, 1)$  таковы, что  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + a + b + c + d = \sqrt{80}$ . Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$\frac{a-b+1}{ab-b+1} + \frac{b-c+1}{bc-c+1} + \frac{c-d+1}{cd-d+1} + \frac{d-a+1}{da-a+1}.$$

10. Докажите, что для любого натурального  $n$  выполнено равенство

$$\left\lfloor \sqrt[2]{\frac{n}{1^3}} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt[2]{\frac{n}{2^3}} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt[2]{\frac{n}{3^3}} \right\rfloor + \dots = \left\lfloor \sqrt[3]{\frac{n}{1^2}} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt[3]{\frac{n}{2^2}} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt[3]{\frac{n}{3^2}} \right\rfloor + \dots$$

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 01.12.2024

## ЮНИОРЫ, ВЫСШАЯ ЛИГА (бои за 5-8 места), ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Окружность  $\omega$  касается окружности  $\omega_1$  в точке  $P$ . Прямая  $\ell$  отсекает на окружностях  $\omega$  и  $\omega_1$  равные хорды  $AB$  и  $A_1B_1$  (порядок точек  $A - B - B_1 - A_1$ ). Прямые  $PA_1$  и  $PB_1$  повторно пересекают окружность  $\omega$  в точках  $A'$  и  $B'$ . Лучи  $AA'$  и  $BB'$  пересекаются в точке  $Q$ . Докажите, что окружность  $(QA'B')$  пересекает окружность  $\omega_1$  в двух точках, причем их можно назвать  $X$  и  $Y$  так, чтобы  $\angle APB = \angle AXA_1 - \angle BYB_1$ .

2. Во всех клетках таблицы  $n \times n$  написаны  $-1$ . За одну операцию можно выбрать две соседние строки и два соседних столбца, оставить четыре числа, расположенные на их пересечении, и поменять знак всех остальных чисел, записанных в выбранных строках и столбцах. При каких  $n$  можно такими операциями сделать все числа равными 1?

3. Дано простое  $p > 5$ . Докажите, что для некоторого натурального  $k \leq \frac{p-5}{2}$  число  $kp + 1$  является суммой квадратов двух натуральных чисел.

4. Точка  $O_a$  — середина дуги  $BC$  описанной окружности треугольника  $ABC$ , не содержащей точку  $A$ . Окружность  $\omega_a$  с центром в точке  $O_a$  касается прямой  $BC$ . Окружности  $\omega_b$  и  $\omega_c$  определяются аналогично. К окружностям  $\omega_b$  и  $\omega_c$  проведена общая внешняя касательная  $\ell_a$ , относительно которой эти окружности и отрезок  $BC$  лежат в разных полуплоскостях. Прямые  $\ell_b$  и  $\ell_c$  определяются аналогично. Докажите, что прямые  $\ell_a, \ell_b$  и  $\ell_c$  пересекаются в одной точке.

5. Можно ли все диагонали какого-нибудь выпуклого 100-угольника покрыть 94 треугольниками с вершинами в его вершинах?

6. Существуют ли натуральные числа  $n$  и  $k$  и простое число  $q$ , для которых

$$n^q + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = q^k?$$

7. Найдите наибольшее натуральное  $k$ , для которого можно выбрать несколько натуральных чисел от 1 до  $2^n$  и раскрасить их в  $k$  цветов так, чтобы сумма всех чисел каждого цвета равнялась степени двойки ( $1 = 2^0$  тоже считается степенью двойки).

8. Вася заказал в интернете  $n$  пар носков. Ему пришло несколько коробок, в каждой из которых не более 2024 носков (в разных коробках может быть разное количество носков). К сожалению, носки в коробках лежат хаотично (т.е. количество левых и правых носков в коробке может отличаться). Докажите, что существует натуральное  $N$  такое, что для любого  $n > N$  Вася может убрать несколько коробок (хотя бы одну, но не все) в шкаф так, чтобы в оставшихся коробках левых и правых суммарно было поровну.

9. Положительные числа  $a, b, c$  удовлетворяют условию  $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \leq 8$ . Докажите, что

$$ab + bc + ca \leq 3.$$

10. Докажите, что для любого натурального  $n$  выполнено равенство

$$\left\lfloor \sqrt[2]{\frac{n}{1^3}} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt[2]{\frac{n}{2^3}} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt[2]{\frac{n}{3^3}} \right\rfloor + \dots = \left\lfloor \sqrt[3]{\frac{n}{1^2}} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt[3]{\frac{n}{2^2}} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt[3]{\frac{n}{3^2}} \right\rfloor + \dots$$

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 01.12.2024

## ЮНИОРЫ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. На стороне  $CD$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  отмечена точка  $E$ , а на диагонали  $BD$  — точка  $F$ . Оказалось, что  $AB = DE$ ,  $AC = DF$  и  $BC = EF$ . Докажите, что  $AD \parallel EF$ .

2. Во всех клетках таблицы  $n \times n$  написаны  $-1$ . За одну операцию можно выбрать две соседние строки и два соседних столбца, оставить четыре числа, расположенные на их пересечении, и поменять знак всех остальных чисел, записанных в выбранных строках и столбцах. При каких  $n$  можно такими операциями сделать все числа равными 1?

3. Для любого натурального числа  $n$  докажите, что существуют различные натуральные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  такие, что для любого  $i$  от 1 до  $n$  число  $a_i$  является делителем числа  $\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{a_i} + 1$ .

4. Точка  $O_a$  — середина дуги  $BC$  описанной окружности треугольника  $ABC$ , не содержащей точку  $A$ . Окружность  $\omega_a$  с центром в точке  $O_a$  касается прямой  $BC$ . Окружности  $\omega_b$  и  $\omega_c$  определяются аналогично. К окружностям  $\omega_b$  и  $\omega_c$  проведена общая внешняя касательная  $\ell_a$ , относительно которой эти окружности и отрезок  $BC$  лежат в разных полуплоскостях. Прямые  $\ell_b$  и  $\ell_c$  определяются аналогично. Докажите, что прямые  $\ell_a, \ell_b$  и  $\ell_c$  пересекаются в одной точке.

5. Дано натуральное число  $n \geq 4$ . При каком наименьшем  $k$  любой выпуклый  $n$ -угольник можно представить в виде объединения  $k$  треугольников?

6. Существуют ли натуральные числа  $n$  и  $k$  и простое число  $q$ , для которых

$$n^q + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = q^k?$$

7. Найдите наибольшее натуральное  $k$ , для которого можно выбрать несколько натуральных чисел от 1 до  $2^n$  и раскрасить их в  $k$  цветов так, чтобы сумма всех чисел каждого цвета равнялась степени двойки ( $1 = 2^0$  тоже считается степенью двойки).

8. Вася заказал в интернете  $n$  пар носков. Ему пришло несколько коробок, в каждой из которых не более 2024 носков (в разных коробках может быть разное количество носков). К сожалению, носки в коробках лежат хаотично (т.е. количество левых и правых носков в коробке может отличаться). Докажите, что существует натуральное  $N$  такое, что для любого  $n > N$  Вася может убрать несколько коробок (хотя бы одну, но не все) в шкаф так, чтобы в оставшихся коробках левых и правых суммарно было поровну.

9. Положительные числа  $a, b, c$  удовлетворяют условию  $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \leq 8$ . Докажите, что

$$ab + bc + ca \leq 3.$$

10. Дан квадратный трёхчлен  $x^2 + a_0x + b_0$ . По нему строится последовательность квадратных трёхчленов по следующему правилу: если у трёхчлена  $x^2 + a_i x + b_i$  есть два (необязательно различных) вещественных корня, то следующий трёхчлен в последовательности — это  $x^2 + a_{i+1}x + b_{i+1}$ , где  $a_{i+1} = b_i$ , а  $b_{i+1}$  — минимальный из корней  $x^2 + a_i x + b_i$ . Найдите все трёхчлены  $x^2 + a_0x + b_0$  такие, что в построенной последовательности найдутся два подряд идущих совпадающих трёхчлена.